Tema 3. Razonamiento Aproximado
Lección 3.2. Razonamiento con imprecisión

Referencias Bibliográficas (diapositivas):

- José Cuena. Sistemas Inteligentes. Conceptos, técnicas y métodos de construcción.
Facultad de Informática – Servicio de Publicaciones.
Fundación General de la UPM. Madrid, 1997.

- G. J. Klir, B. Yuan. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications.
Prentice Hall PTR. New Jersey, 1995.

Índice
Razonamiento con imprecisión

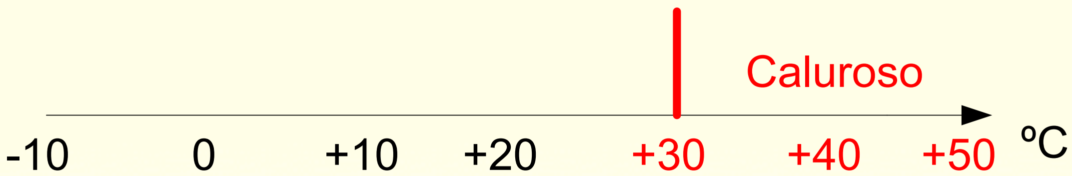
- Fundamentos de lógica borrosa
- Razonamiento en lógica borrosa
- Controladores difusos

Índice
Fundamentos de lógica borrosa

1. Borrosidad, vaguedad, imprecisión.
2. Conjuntos borrosos.
3. Operaciones con conjuntos borrosos.

Conceptos (I)

- La lógica borrosa permite representar conjuntos con fronteras no precisas.
- La afirmación “x pertenece a A” no es cierta o falsa, sino que medible mediante una posibilidad en [0,1].
- Permite manejar la vaguedad o imprecisión.
  - “Día caluroso”: la frontera entre caluroso y templado no es exacta



  - ¿Se puede suponer que si hay 30ºC el día es caluroso, pero si hay 29ºC entonces ya no lo es?

Conceptos (II)

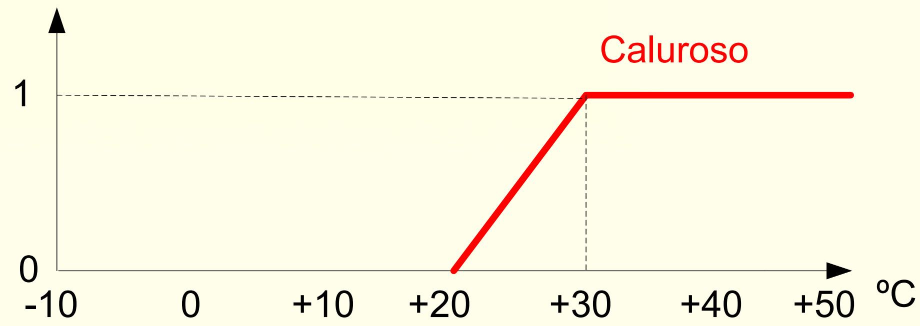
- Imprecisión: vaguedad, fronteras mal definidas.
- Incertidumbre: si lanzamos un dado hay seis posibilidades (precisas), pero no se desconoce qué saldrá.
- Aplicaciones de la lógica borrosa:
  - Sistemas basados en el conocimiento.
  - Control difuso.
  - Reconocimiento de patrones.
  - Proceso de encaje en marcos.

Índice
Fundamentos de lógica borrosa

1. Borrosidad, vaguedad, imprecisión.
2. Conjuntos borrosos.
3. Operaciones con conjuntos borrosos.

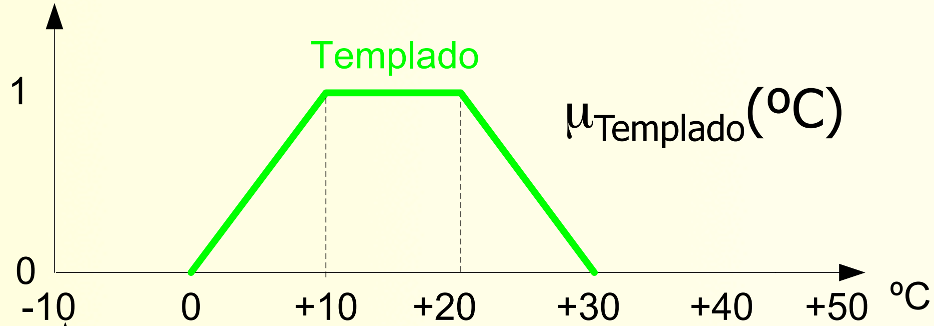
Conjuntos borrosos

- Conjunto borroso: aquél en donde la pertenencia de los elementos se define mediante una función de pertenencia o función de distribución de posibilidad.
  - $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$.
    - El conjunto borrosoA tiene una función de pertenencia $\mu_A(x)$ que asigna a cada valor $x \in X$ un número entre 0 (no pertenece) y 1 (sí pertenece).
    - Los valores intermedios representan pertenencia parcial.
- Ejemplo: $\mu_{caluroso}$: Tª $\rightarrow [0,1]$:

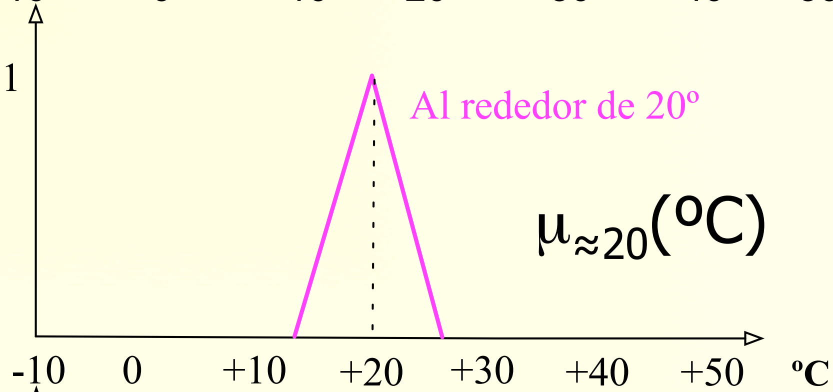


Distribuciones típicas

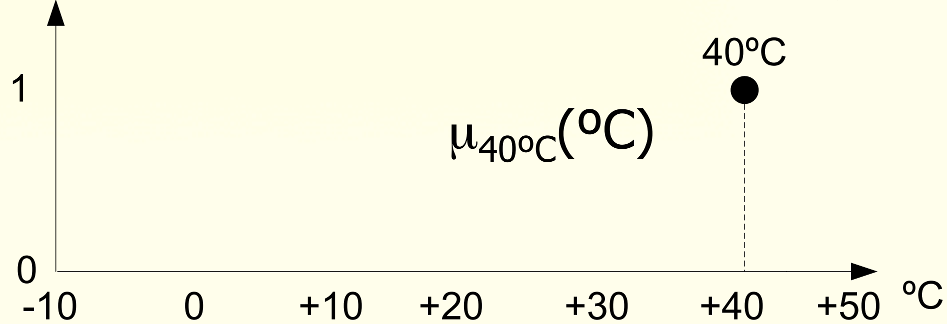
- Trapezoidales:



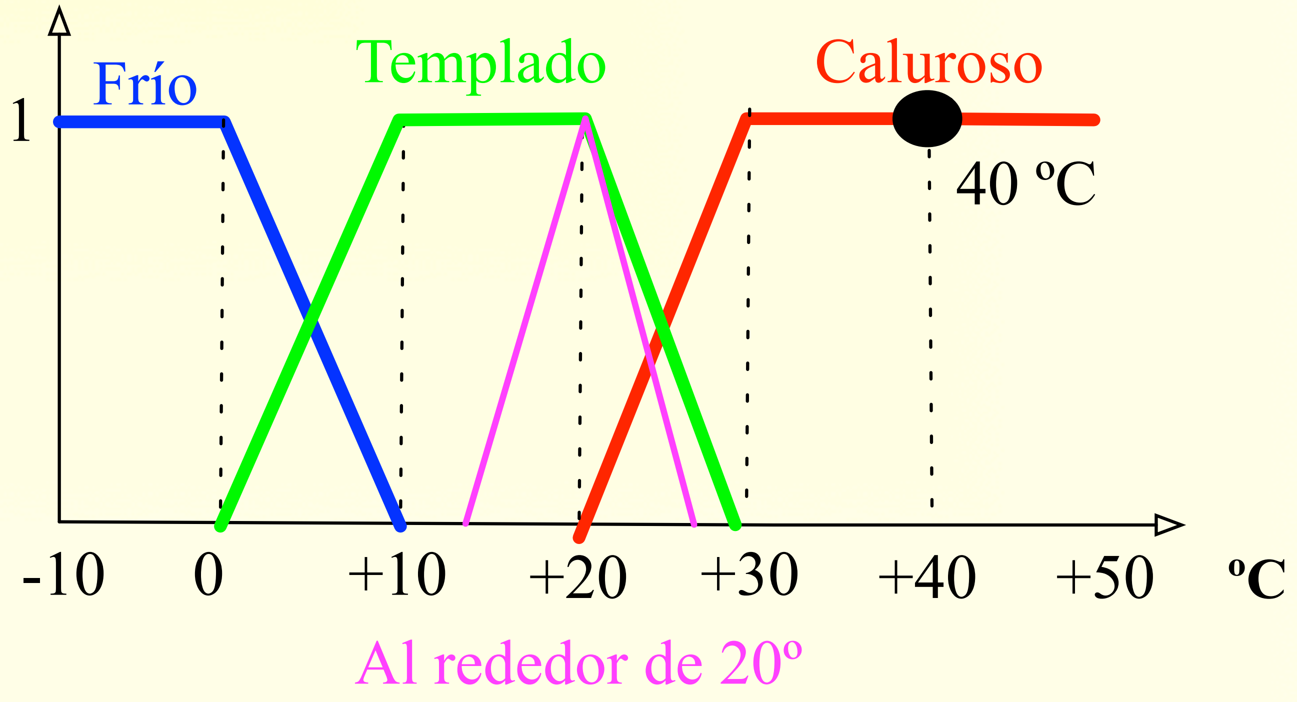
- Triangulares:



- Nítidas:



Ejemplo



$\mu_{Frio}(^oC)$ $\mu_{Templado}(^oC)$ $\mu_{\approx 20}(^oC)$ $\mu_{Caluroso}(^oC)$ $\mu_{40^oC}(^oC)$

Índice
Fundamentos de lógica borrosa

1. Borrosidad, vaguedad, imprecisión.
2. Conjuntos borrosos.
3. Operaciones con conjuntos borrosos.

Composición de fórmulas

- A partir de la cuantificación de la posibilidad de que sea cierta "x es p" expresado como $\mu_p(x)$:
  - x es p y q: $\mu_{p \wedge q}(x)$.
  - x es p ó q: $\mu_{p \vee q}(x)$
  - x no es p: $\mu_{\sim p}(x)$
  - Si x es p, entonces x es q: $\mu_{p \to q}(x)$
- Generalización a n dimensiones:
  - $\mu_{p \wedge q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mu_{p \vee q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, etc.

Extensión cilíndrica

- Para componer dos funciones, deben estar referidas a las mismas variables:
  - No es posible componer x es p e y es q:

$$\mu_p(x) \wedge \mu_q(y)$$

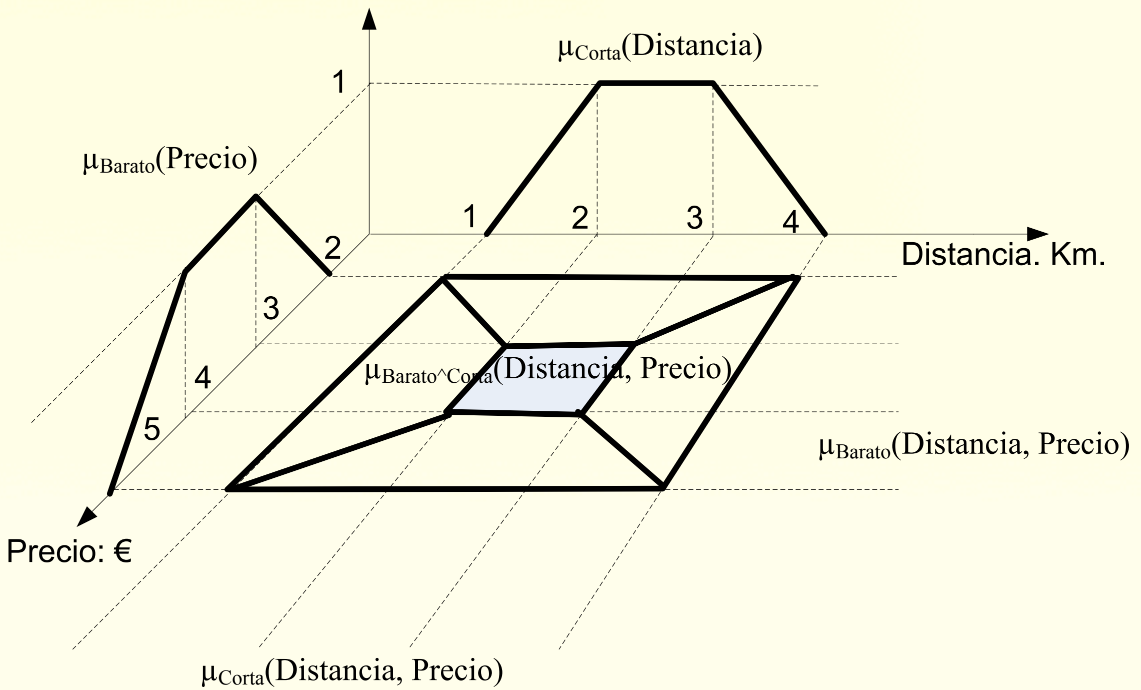
- Para ello se calcula la extensión cilíndrica de $\mu_p(x)$ con y, y la extensión cilíndrica de $\mu_q(y)$ con x para obtener $\mu_p(x,y)$ y $\mu_q(x,y)$.
  - Entonces es posible: $\mu_{p \wedge q}(x,y)$

- La extensión cilíndrica de $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con y es $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ tal que cumple:

$$\forall\, y \;\; \mu(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Extensión cilíndrica. Ejemplo

- Se desea representar que la tarifa de un taxi es barata cuando la carrera es corta.
  - Se tiene μ_{corta}(distancia) y μ_{barato}(precio).
  - Se desea calcular $\mu_{corta \wedge barato}$(distancia, precio)



t-Norma, t-Conorma, negación

- Se manejan las siguientes funciones:
  - t-norma:
    - Conjunción (lógica), intersección (conjuntos)
    - T (x,y). $\mu_{p \wedge q}(x) = T(\mu_p(x), \mu_q(x))$
  - t-conorma:
    - Disyunción (lógica), unión (conjuntos)
    - S (x,y). $\mu_{p \vee q}(x) = S(\mu_p(x), \mu_q(x))$
  - Negación:
    - N(x). $\mu_{\sim p}(x) = N(\mu_p(x))$.

Funciones T: t-normas

- Es una función que devuelve un valor [0,1].
- Representa la conjunción o intersección.
- $\forall x, y, z \in [0,1]$ Propiedades:
  1. $T(x,1) = x$ (elemento neutro)
  2. $x \leq y \rightarrow T(x,z) \leq T(y,z)$ (monotonía)
  3. $T(x,y) = T(y,x)$ (conmutativa)
  4. $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$ (asociativa)
- Ejemplos:
  - $T(x,y) = \text{mín}(x,y)$ (mínimo)
  - $T(x,y) = P(x,y) = x \cdot y$ (producto)
  - $T(x,y) = W(x,y) = \text{máx}(0,x+y-1)$ (Lukasiewicz)
  - $T(x,y) = Z(x,y) = x$ si $y=1$; y si $x=1$; 0 resto (drástica)

Funciones S: t-conormas

- Es una función binaria que devuelve un valor [0,1].
- Representa la disyunción.
- $\forall x, y, z \in [0,1]$ Propiedades:
  1. $S(x,0) = x$ (elemento neutro)
  2. $x \leq y \rightarrow S(x,z) \leq S(y,z)$ (monotonía)
  3. $S(x,y) = S(y,x)$ (conmutativa)
  4. $S(x,T(y,z)) = S(T(x,y),z)$ (asociativa)
- Ejemplos:
  - $S(x,y) = \text{máx}(x,y)$ (máximo)
  - $S(x,y) = P'(x,y) = x+y-x\cdot y$ (suma-producto)
  - $S(x,y) = W'(x,y) = \text{mín}(1,x+y)$ (Lukasiewicz)
  - $S(x,y) = Z'(x,y) = x$ si $y=0$; y si $x=0$; 1 resto (drástica)

Funciones de negación

- Es una función unaria que devuelve un valor [0,1].
- Para que sea intuitiva debe cumplir $\forall\ x \in [0,1]$:
  1. $N(0) = 1;\ N(1) = 0$ (condiciones frontera)
  2. $x \leq y \rightarrow N(x) \geq N(y)$ (inversión de monotonía)
- Ejemplos:
  - $N(x) = (1-x)$
  - $N(x) = (1-x^2)^{1/2}$

Dualidad

- Se dice que una t-norma y una t-conorma son duales con respecto a una negación sii:
  - $N(T(x,y)) = S(N(x), N(y))$
  - $N(S(x,y)) = T(N(x), N(y))$
- Son duales con respecto a $N(x) = 1-x$:
  - $<$ mín(x,y), máx(x,y) $>$
  - $< P(x,y), P'(x,y) >$
  - $< W(x,y), W'(x,y) >$
  - $< Z(x,y), Z'(x,y) >$

Implicación difusa (I)

- Se han visto las operaciones:
  - T(x,y), S(x,y) y N(x)
  - Conjuntos:
    - Intersección, unión y complementario
  - Lógica:
    - Conjunción, disyunción y negación
- En lógica borrosa se define la implicación a través de la función binaria J (x,y) que devuelve un valor [0,1].

$$\mu_{p \to q}(x) = J(\mu_p(x), \mu_q(x))$$

Implicación difusa (II)

- De la lógica clásica, se tiene que:
  - $A \rightarrow B = \neg A \vee B$
  - $J(x,y) = S(N(x),y)$.
- Tomando $N(x) = 1-x$, se tiene:
  - Con $S(x,y) = \text{máx}(x,y)$ $J(x,y) = \text{máx}(1-x,y)$
  - Con $S(x,y) = P'(x,y) = x+y-x\cdot y$ $J(x,y) = 1-x+x\cdot y$
  - $S(x,y) = W'(x,y) = \text{mín}(1,x+y)$ $J(x,y) = \text{mín}(1,1-x+y)$
  - $S(x,y) = Z'(x,y) = x$ si $y=0$; y si $x=0$; 1 resto

    $J(x,y) = y$ si $x=1$; $1-x$ si $y=0$; 1 resto

Implicación difusa (III)

- En la lógica clásica se cumple:
  - $A \vee B = A \vee (\neg A \wedge B)$
  - Puesto que $A \rightarrow B = \neg A \vee B$
  - Se tiene: $A \rightarrow B = \neg A \vee (A \wedge B)$
  - $J(x,y) = S\,(N(x), T(x,y))$
- Utilizando la negación $N(x) = 1-x$:
  - Con <min,max> $J(x,y) = \text{máx}\,(1-x, \text{mín}(x,y))$
  - Con <P , P'> $J(x,y) = 1-x + x^2y$
  - Con <W, W'> $J(x,y) = \text{máx}\,(1-x,y)$
  - Con <Z, Z'>

    $J(x,y) = y$ si $x=1$; $1-x$ si $x\neq 1$ $y\neq 1$; 1 si $x\neq 1$ $y=1$
  - $J\,(x,y) = \text{mín}\,(x,y)$. Implicación de Mamdani

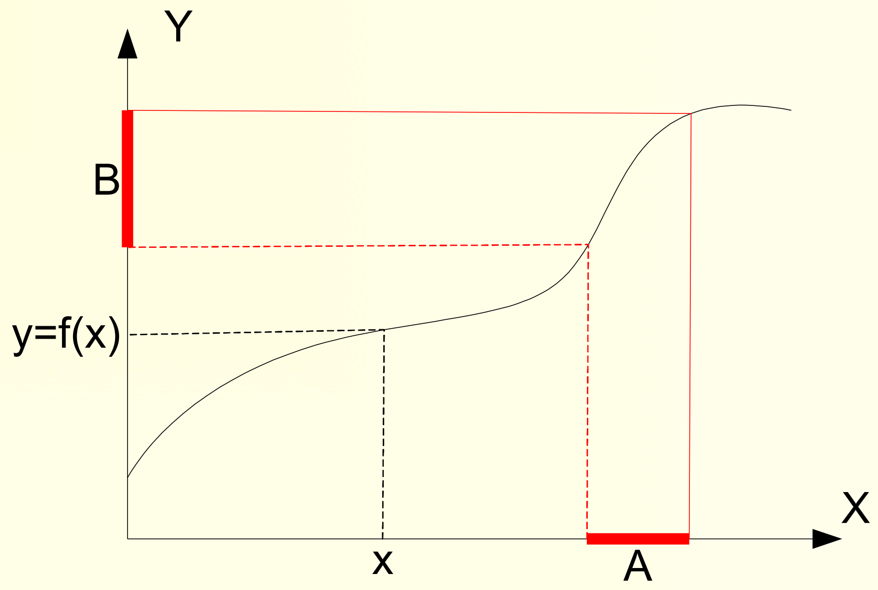
Índice
Razonamiento con imprecisión

- Fundamentos de lógica borrosa
- Razonamiento en lógica borrosa
- Controladores difusos

Inferencia en conjuntos (I)

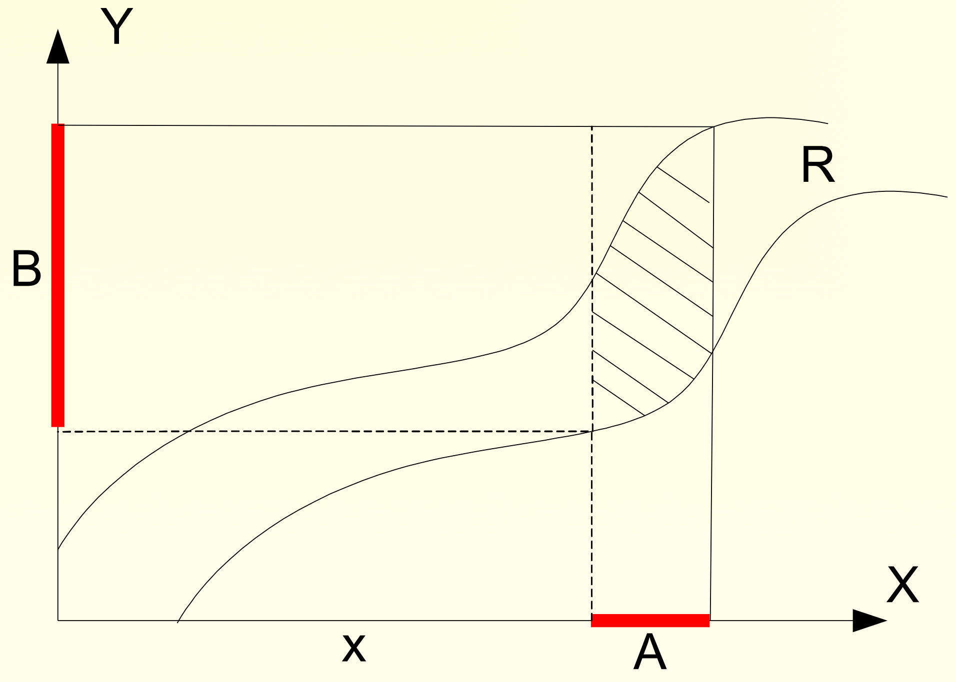
La inferencia en conjuntos clásicos se puede ver de la siguiente forma:

- Dados X e Y dos conjuntos.
- La relación entre ambos viene dada por la función f(X).
- Dado un valor X=x, se puede inferir y=f(x).
- Dado un subconjunto $A \subset X$, se puede inferir el subconjunto $B \subset Y$: $B=\{y \in Y \ / \ y=f(x), x \in A\}$



Inferencia en conjuntos (II)

- Dada una relación R cualquiera entre los conjuntos X e Y:
  - Dado el subconjunto $A \subset X$, se puede inferir el subconjunto $B \subset Y$, $B=\{y \in Y \,/\, \langle x,y \rangle \in R,\ x \in A\}$



Función característica

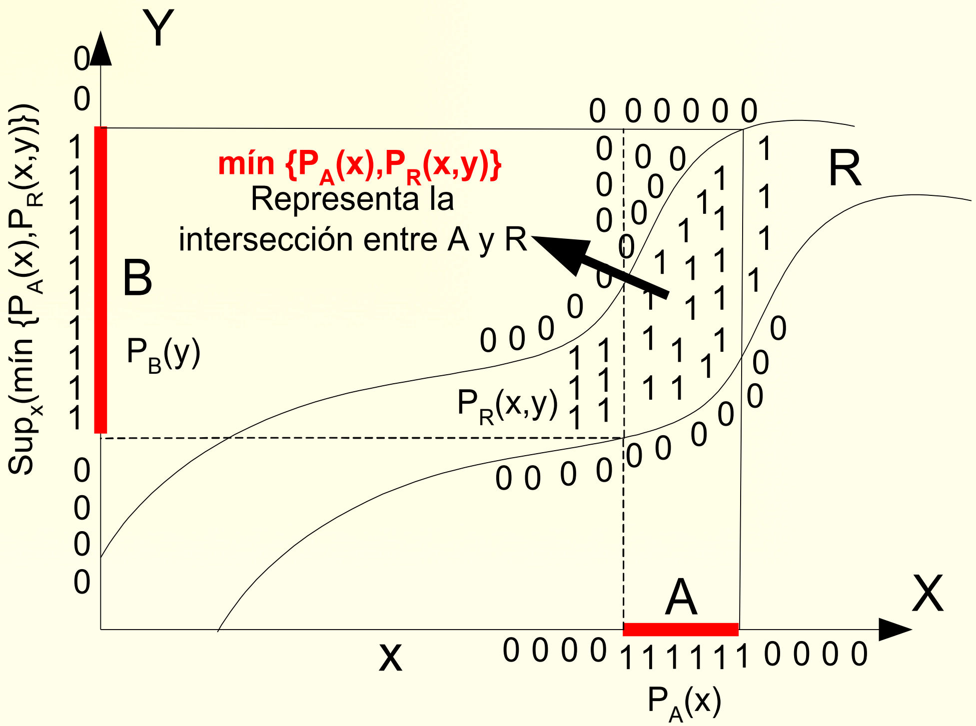
- Se define la función característica de un conjunto A, $P_A(x)$, a una función de pertenencia definida:
  - $P_A(x)=1$, si $x \in A$
  - $P_A(x)=0$ en otro caso.

Para todos los valores de x (por cada fila) se obtiene el supremo

$$\mathrm{Sup}_x(\text{mín } P_A(x), P_R(x,y))$$

Se obtiene la fórmula:

$$P_B(y) = \underset{x \in X}{\mathrm{Sup}}\left\{\text{mín}\left\{P_A(x), P_R(x,y)\right\}\right\}$$



Regla composicional de inferencia

- Partiendo de la expresión anterior:
  - $P_B(y) = \operatorname*{Sup}_{x \in X} \left\{ \text{mín}\, \{ P_A(x), P_R(x,y) \} \right\}$
- Generalizando para conjuntos difusos:
  - $\mu_B(y) = \operatorname*{Sup}_{x \in X} \left\{ \text{mín}\, \{ \mu_A(x), \mu_R(x,y) \} \right\}$
- La intersección puede emplear una T-norma cualquiera:
  - $\mu_B(y) = \operatorname*{Sup}_{x \in X} \left\{ T\left(\mu_A(x), \mu_R(x,y) \right) \right\}$
- Si R puede ser una relación de implicación:
  - Regla Composicional de Inferencia (RCI)

$$\mu_{B'}(y) = \operatorname*{Sup}_{x \in X} \left\{ T\left(\mu_{A'}(x), \mu_{A \to B}(x,y) \right) \right\}$$

Modus ponens generalizado

- Con la RCI, se puede hacer inferencia con modus ponens:
  - Regla: Si X es A, entonces Y es B
  - Hecho: X es A.

  - Conclusión: Y es B
- En lógica borrosa se puede generalizar al no requerir X es A, sino X es A':
  - Modus ponens generalizado:
    - Regla: Si X es A, entonces Y es B
    - Hecho: X es A'

    - Conclusión: Y es B'
  - La función de posibilidad de $\mu_{B'}$ se calcula con RCI.

Inferencia borrosa con RCI

- Datos: X es A: $\mu_A(x)$, Y es B: $\mu_B(y)$, X es A': $\mu_{A'}(x)$
- Objetivo: cálculo $\mu_{B'}(y)$

1. Calcular $\mu_{A\rightarrow B}(x,y)$ a partir de $\mu_A(x)$ y $\mu_B(y)$
   - Es necesario realizar las extensiones cilíndricas: $\mu_A(x)$ con y, $\mu_B(y)$ con x
   - Se emplea para la implicación cualquier función J(x,y). Zadeh: $J(x,y)=\text{máx}\,\{1-x, \text{mín}(x,y)\}$.
2. Calcular $T(\mu_{A'}(x), \mu_{A\rightarrow B}(x,y))$.
   - Se realiza la extensión cilíndrica de $\mu_{A'}(x)$ con y.
   - Se emplea una T-norma. $T(x,y) = \text{mín}\,(x,y)$.
3. Calcular el supremo en x de $T(\mu_{A'}(x), \mu_{A\rightarrow B}(x,y))$, que está en función de x e y.
   - Se obtiene la distribución de posibilidad sobre la dimensión y: $\mu_{B'}(y)$, es decir, las posibilidades de y es B'.

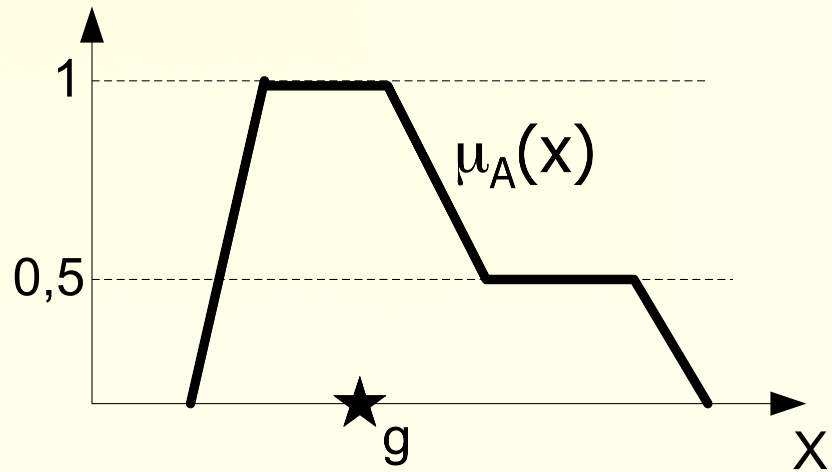
Motor de inferencia borroso

- Base de conocimiento:
  - R1: Si X es A_1, entonces Y es B_1.
  - R2: Si X es A_2, entonces Y es B_2.
  - ....
  - Rn: Si X es A_n, entonces Y es B_n.
  - Hecho: X es A'
- Se aplica la RCI a cada regla, obteniendo:
  - $\mu_{B1'}(y)$, $\mu_{B2'}(y)$, ..., $\mu_{Bn'}(y)$.
- A partir de las distribuciones anteriores, se calcula la distribución final y es B' mediante la t-conorna S.
  - $\mu_{B'}(y)=S(\mu_{B1'}(y), \mu_{B2'}(y), ..., \mu_{Bn'}(y))$.

Desborrocificación
Método del centro de gravedad

- Cálculo de la proyección en el eje x del centro de gravedad de la distribución.
- Se debe muestrear suficientemente fino para cubrir adecuadamente la función.
- Un muestreo excesivo exige gran carga computacional.
- Para generalizar $\mu_A(x) = \mu_{B'}(y)$

$$g = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^{N} \mu_A(x_i)}$$



Desborrocificación

Método $\sum_{cuenta}$

- Objetivo:
  - Dado un conjunto de distribuciones de posibilidad $\mu_{B1}(x), \mu_{B2}(x), \ldots, \mu_{Bn}(x)$
  - Encontrar qué $\mu_{Bi}(x)$ se parece más a una dada $\mu_A(x)$.
- La $\sum_{cuenta}$ es una medida proporcional al área de la distribución.
  - Se basa en la discretización de la función de distribución.
  - $\sum_{cuenta}(A) = \sum_{i=1}^{N} \mu_A(x_i)$
- El método elige como más parecido a $\mu_A(x)$ aquélla $\mu_{Bi}(x)$ que máximiza:

$$\sum_{cuenta}(B_i/A) = \frac{\sum_{cuenta}(A \wedge B_i)}{\sum_{cuenta}(B_i)}$$

Desborrocificación
Método de la distancia

- Objetivo:
  - Dado un conjunto de distribuciones de posibilidad: $\mu_{B1}(x)$, $\mu_{B2}(x)$, ..., $\mu_{Bn}(x)$
  - Encontrar qué $\mu_{Bi}(x)$ se parece más a una dada $\mu_A(x)$.
- Se emplea una función distancia definida como:

$$d_i = \sqrt{\alpha \cdot (B_i - A)^2 + \beta \cdot (g_i - g)^2}$$

  - B_i y A son, respectivamente, las áreas de $\mu_{Bi}(x)$ y $\mu_A(x)$.
  - g_i y g son, respectivamente, los centros de gravedad de $\mu_{Bi}(x)$ y $\mu_A(x)$.
  - α y β son dos constantes: $\alpha + \beta = 1$.
- El método elige como más parecido a $\mu_A(x)$ aquella $\mu_{Bi}(x)$ que minimiza d_i.

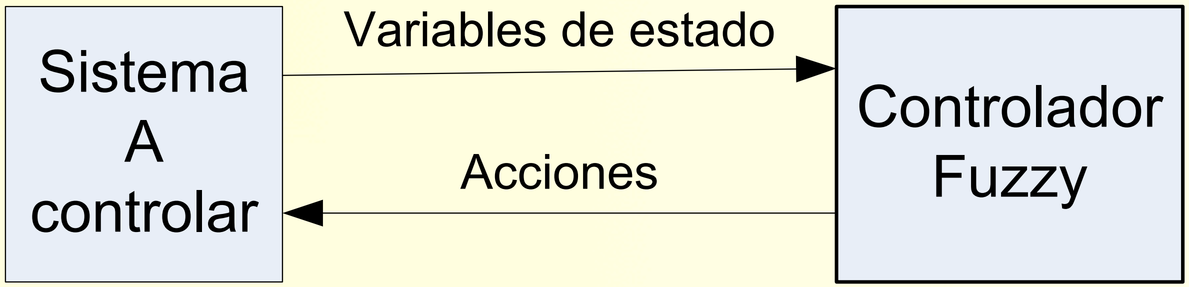
Índice
Razonamiento con imprecisión

- Fundamentos de lógica borrosa
- Razonamiento en lógica borrosa
- Controladores difusos

Controladores difusos

- Se emplean para controlar sistemas inestables.
- El control tiene por objeto garantizar una salida en el sistema a pesar de las perturbaciones que le afectan.
- Ejemplos:
  - Sistemas de navegación.
  - Sistemas de climatización.
  - Sistemas de ventilación (túneles, garajes).

Esquema control difuso



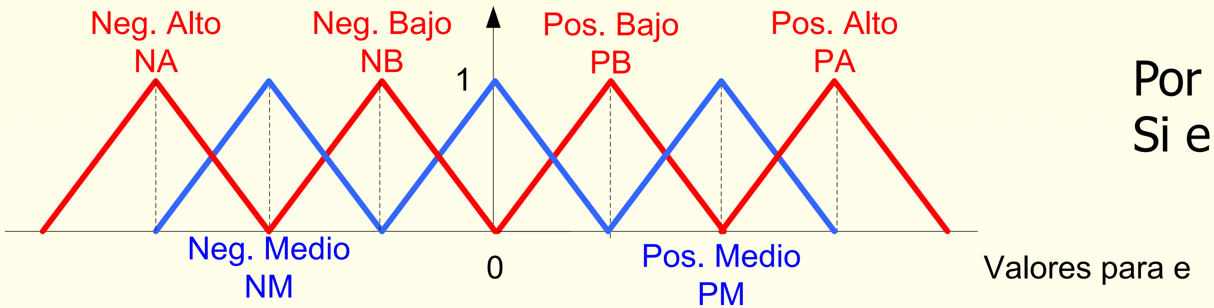
- Variables de estado:
  - $s_1, s_2, \ldots, s_n$: estado del sistema. Temperatura.
  - $e_1, e_2, \ldots, e_n$: desvíos (error) con respecto al valor de referencia. Temperatura con respecto a 20 ºC.
  - $\Delta e_1, \Delta e_2, \ldots, \Delta e_n$: tendencia del error.
  - $u_1, u_2, \ldots, u_m$: estado del elemento a controlar (actuador). Apertura de válvula, caudal de gas.
- Acciones:
  - $v_1, v_2, \ldots, v_m$: cambios e realizar en los actuadores. Abrir o cerrar en un cierto grado válvula o caudal de gas.

Modelo de control difuso

- Los valores de las variables de estado y acciones pueden ser etiquetas lingüísticas (valores cualitativos) que son representados por funciones de posibilidad:

Si $s_1=A_1$, …, $e_1=B_1$, …,$\Delta e_1=C_1$, …, $u_1=D_1$, …, entonces $v_1=E_1$, …

- En lo que sigue, se utilizarán reglas del tipo:
  - Si e=A y Δe=B, entonces v = C
  - Cada valor de e, Δe y v serán etiquetas lingüísticas con su correspondiente función de posibilidad. Por ejemplo, para e:



Por ejemplo:
Si e = NB

Notación

- Dada la regla: Si e=A y Δe=B, entonces v = C
  - A, B y C son funciones de posibilidad:
  - $\mu_A(e)$, $\mu_B(\Delta e)$, $\mu_C(v)$
- La notación será la siguiente:
  - Si e = A(e) y Δe=B(Δe), entonces v = C(v)
- Un controlador difuso posee una base de conocimiento de reglas del tipo:
  - R1: Si e = $A_1(e)$ y $\Delta e=B_1(\Delta e)$, entonces v = $C_1(v)$
  - R2: Si e = $A_2(e)$ y $\Delta e=B_2(\Delta e)$, entonces v = $C_2(v)$
  - …
  - Rn: Si e = $A_n(e)$ y $\Delta e=B_n(\Delta e)$, entonces v = $C_n(v)$

  - En un momento el estado del sistema es:
    - e = A(e) y Δe=B(Δe).
  - Tras un proceso de inferencia, el controlador responde para mantener el equilibrio: v = C(v)

Regla composicional de inferencia

- El proceso de inferencia emplea la regla composicional de inferencia:

$$\mu_{B'}(y) = \operatorname*{Sup}_{x \in X}\left\{T\left(\mu_{A'}(x), \mu_{A \to B}(x, y)\right)\right\}$$

  - y es v. La acción a tomar.
  - x es bidimensional: e y Δe.
  - $\mu_{B'}(y)$ = C(v). Distrib. de posib. de la acción a tomar.
  - $\mu_{A'}(x)$ = A(e) ^ B(Δe). Estado actual del sistema.
  - $\mu_{A \to B}(x,y)$ = Ri: A_i(e) ^ B_i(Δe) $\to$ v = C_i(v)

$$C(v) = \operatorname*{Sup}_{e, \Delta e}\left\{T\left(A(e) \wedge B(\Delta e), A_i(e) \wedge B_i(\Delta e) \to C_i(v)\right)\right\}$$

Inferencia en controladores (I)

- Se emplea T (x,y) = mín (x,y).
- J (x,y) = mín (x,y). Mamdani.

$$C(v) = \underset{e,\Delta e}{\mathrm{Sup}}\left\{T\left(A(e) \wedge B(\Delta e), A_i(e) \wedge B_i(\Delta e) \rightarrow C_i(v)\right)\right\}$$

$$C(v) = \underset{e,\Delta e}{\mathrm{Sup}}\left\{m\acute{\imath}n\left(\mathrm{m\acute{\imath}n}(A(e), B(\Delta e)), \mathrm{m\acute{\imath}n}(\mathrm{m\acute{\imath}n}(A_i(e), B_i(\Delta e)), C_i(v))\right)\right\}$$

Asociatividad:

$$C(v) = \underset{e,\Delta e}{\mathrm{Sup}}\left\{m\acute{\imath}n\left(\mathrm{m\acute{\imath}n}(\mathrm{m\acute{\imath}n}(A(e), B(\Delta e)), \mathrm{m\acute{\imath}n}(A_i(e), B_i(\Delta e))), C_i(v)\right)\right\}$$

$$C(v) = m\acute{\imath}n\left(\underset{e,\Delta e}{\mathrm{Sup}}\left\{m\acute{\imath}n\left(\mathrm{m\acute{\imath}n}(A(e), B(\Delta e)), \mathrm{m\acute{\imath}n}(A_i(e), B_i(\Delta e))\right)\right\}, C_i(v)\right)$$

$$C(v) = m\acute{\imath}n\left(m\acute{\imath}n\left(\underset{e}{\mathrm{Sup}}\left\{m\acute{\imath}n\left(A(e), A_i(e)\right)\right\}, \underset{\Delta e}{Sup}\left\{\mathrm{m\acute{\imath}n}(B(\Delta e), B_i(\Delta e))\right\}\right), C_i(v)\right)$$

Inferencia en controladores (II)

Entrada al sistema — Entrada al sistema

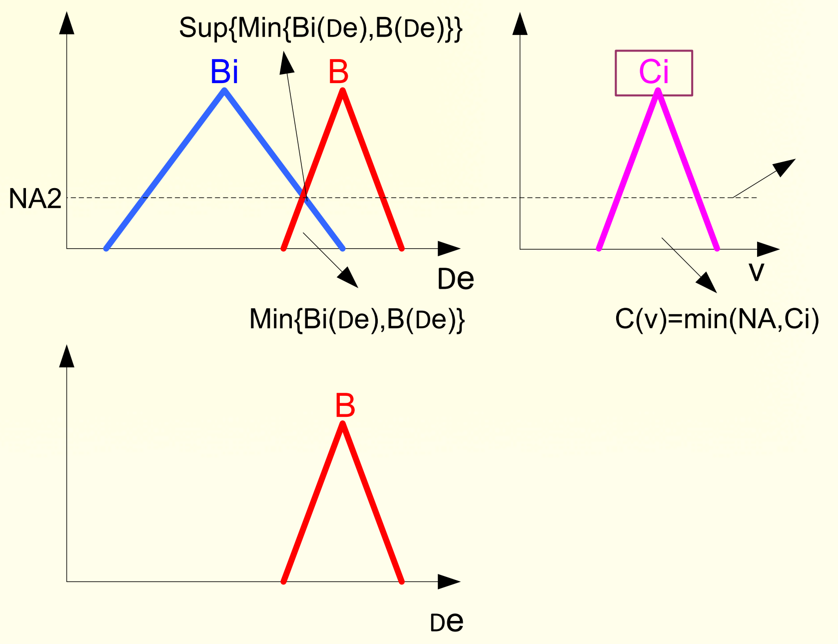
$$C(v) = \textit{mín}\left(\textit{mín}\left(\mathrm{Sup}_{e}\left\{ \textit{mín}\left(A(e), A_i(e) \right) \right\}, \mathit{Sup}_{\Delta e}\left\{ \mathrm{mín}\left(B(\Delta e), B_i(\Delta e) \right) \right\} \right), C_i(v) \right)$$

Antecedente regla — Antecedente regla

$$C(v) = \mathrm{mín}\left(\mathrm{mín}\left(NA_1, NA_2 \right), C_i(v) \right)$$

$$C(v) = \mathrm{mín}\left(NA, C_i(v) \right)$$

Interpretación geométrica



Procedimiento general

- Dada una base de conocimiento:
  - R1: Si e = A_1(e) y Δe=B_1(Δe), entonces v = C_1(v)
  - …
  - Rn: Si e = A_n(e) y Δe=B_n(Δe), entonces v = C_n(v)
  - Hecho: e = A(e) y Δe=B(Δe).
  - Objetivo: v = C(v)
- Procedimiento:
  1. Para cada regla Ri, se obtiene:
     - NA=mín{Sup_e[mín(A(e),A_i(e))],$Sup_{\Delta e}$[mín(B(Δe),B_i(Δe))]}
     - La distribución del consecuente $C_i'(v)$=mín(NA,C_i(c))
  2. Se obtiene la unión: de los Ci' (v) de las reglas que se disparan
     - $C(v) = \cup_i \{C'_i(v)\} = \text{máx}_i \{C'_i(v)\}$
  3. *Desborrocificación* de C(v)